

---

## Suites numériques et fonction exponentielle

---

### Exercice 1

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \sqrt{2u_n + 3}$  et  $u_0 = 0$ .

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{2x + 3}$ .  
À l'aide de la courbe représentative de  $g$  et de la droite d'équation  $y = x$ , représenter les 6 premiers termes de la suite  $(u_n)$  et conjecturer les variations et la convergence de cette suite.  
Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  en utilisant deux méthodes différentes :
2. Première méthode :
  - (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$ .
  - (b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.
  - (c) En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
3. Deuxième méthode :
  - (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $0 \leq 3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(3 - u_n)$ .
  - (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq 3 - u_n \leq \frac{2^n}{3}(3 - u_0)$ .
  - (c) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

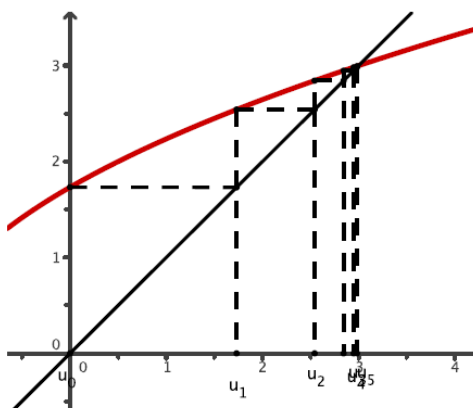
**Exercice 2** On désigne par  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et par  $f'$  sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- (1) pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x)^2 - f(x)^2 = 1$ ;
- (2)  $f'(0) = 1$ ;
- (3) la fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  1. (a) Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$ .
  - (b) Calculer  $f(0)$ .
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :
  - (4) pour tout nombre réel  $x$ ,  $f''(x) = f(x)$ , où  $f''$  désigne la dérivée seconde de  $f$ .
3. On pose  $u = f' + f$  et  $v = f' - f$ .
  - (a) Calculer  $u(0)$  et  $v(0)$ .
  - (b) Démontrer que  $u' = u$  et  $v' = -v$ .
  - (c) En déduire les fonctions  $u$  et  $v$ .
  - (d) En déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .
4. (a) Étudier les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .  
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
5. (a) Soit  $m$  un nombre réel. Démontrer que l'équation  $f(x) = m$  a une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
(b) Déterminer cette solution lorsque  $m = 3$  (donner une valeur exacte puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près).

## Suites numériques et fonction exponentielle

**Correction 1** On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \sqrt{2u_n + 3}$  et  $u_0 = 0$ .

1. La représentation graphique des six premiers termes de la suite :



Conjectures sur la suite  $(u_n)$  : elle est croissante, elle est bornée par 0 et 3, et elle converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de  $f$  et de la droite d'équation  $y = x$ .

2. Première méthode :

(a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$ .

Initialisation :  $u_0 = 0$  donc  $0 \leq u_0 \leq 3$ , la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

Hérédité : supposons que pour un entier  $k$ ,  $0 \leq u_k \leq 3$ . Montrons que  $0 \leq u_{k+1} \leq 3$  :  
 $0 \leq u_k \leq 3$  entraîne  $0 \leq 2u_k \leq 6$ , entraîne  $3 \leq 2u_k + 3 \leq 9$ , entraîne  $\sqrt{3} \leq \sqrt{2u_k + 3} \leq 3$ , par la croissance de la fonction racine carrée sur  $[0; +\infty[$ , donc  $0 \leq u_{k+1} \leq 3$ .

Conclusion : Pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$ .

(b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < u_{n+1}$  :

Initialisation :  $u_0 = 0$  et  $u_1 = \sqrt{2 \times 0 + 3} = \sqrt{3}$  donc  $u_0 < u_1$ , la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

Hérédité : supposons que pour un entier  $k$ ,  $u_k \leq u_{k+1}$ . Montrons que  $u_{k+1} \leq u_{k+2}$ .  $u_k \leq u_{k+1}$  entraîne  $2u_k \leq 2u_{k+1}$  qui entraîne  $2u_k + 3 \leq 2u_{k+1} + 3$  qui entraîne  $\sqrt{2u_k + 3} \leq \sqrt{2u_{k+1} + 3}$  par la croissance de la fonction racine carrée sur  $[0; +\infty[$ , donc  $u_{k+1} \leq u_{k+2}$ .

Conclusion : Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n < u_{n+1}$  et la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

(c) La suite  $(u_n)$  est majorée par 3 et strictement croissante donc elle converge vers un réel  $l$  compris entre 0 et 3. Sa limite est solution de l'équation  $g(x) = x$ , soit  $\sqrt{2x + 3} = x$ , on élève au carré :  $2x + 3 = x^2$  équivaut à  $x^2 - 2x - 3 = 0$ . Le discriminant  $\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16 > 0$ , il y a deux solutions :  $x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$  et  $x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$ . La limite de la suite doit être comprise entre 0 et 3, donc la limite est 3.

3. Deuxième méthode :

(a) On sait que pour tout entier naturel  $n, u_n \leq 3$ , donc  $0 \leq 3 - u_{n+1}$ ; montrons que, pour tout entier naturel  $n \geq 1, 3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(3 - u_n)$  : comme  $u_n \geq 1$ , ceci revient à montrer que pour tout  $x$  de  $[1; 3], 3 - g(x) \leq \frac{2}{3}(3 - x)$ , soit  $1 + \frac{2}{3}x - g(x) \leq 0$ . On pose  $h(x) = 1 + \frac{2}{3}x - g(x)$ . On cherche le signe de cette fonction sur  $[1; 3]$  :  $h$  est dérivable comme somme de fonctions qui le sont, et  $h'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{2\sqrt{2x+3}-3}{3\sqrt{2x+3}}$ . Le dénominateur est positif; pour  $1 \leq x \leq 3, 5 \leq 2x+3 \leq 9$ , soit  $2\sqrt{5} \leq 2\sqrt{2x+3} \leq 6$ , soit  $2\sqrt{5}-3 \leq 2\sqrt{2x+3} \leq 3$ . Or,  $2\sqrt{5}-3$  est positif, donc cette dérivée est positive; donc  $h$  est croissante sur  $[1; 3]$ . Comme  $h(3) = 3 - 3 = 0$ , alors la fonction  $h$  est négative sur  $[1; 3]$ , et donc  $1 + \frac{2}{3}x - g(x) \leq 0$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 1, 1 \leq u_n \leq 3$ , et donc  $3 - g(u_n) \leq \frac{2}{3}(3 - u_n)$ , soit  $3 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(3 - u_n)$ .

(b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n, 0 \leq 3 - u_n \leq \frac{2^n}{3}(3 - u_0)$ .

Initialisation : Par la question précédente,  $0 \leq 3 - u_1 \leq \frac{2^1}{3}(3 - u_0)$ , donc la propriété est vraie pour  $n = 1$ .

Hérédité : supposons que pour un entier  $k, 0 \leq 3 - u_k \leq \frac{2^k}{3}(3 - u_0)$ . Montrons que  $0 \leq 3 - u_{k+1} \leq \frac{2^{k+1}}{3}(3 - u_0)$  :

$$0 \leq 3 - u_{k+1} \leq \frac{2}{3}(3 - u_k) \leq \frac{2}{3} \frac{2^k}{3} (3 - u_0) = \frac{2^{k+1}}{3} (3 - u_0).$$

Conclusion : Pour tout entier naturel  $n, 0 \leq 3 - u_n \leq \frac{2^n}{3}(3 - u_0)$ .

(c) La suite  $\frac{2^n}{3}$  est géométrique de raison  $\frac{2}{3}$  strictement comprise entre 0 et 1, donc elle converge vers 0. Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3}(3 - u_0) = 0$  et par le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - u_n) = 0$  soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$